SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Francesco Uguzzoni

SOLUZIONI POSITIVE PER UN PROBLEMA A CRESCITA CRITICA SU DOMINÎ CONTRAIBILI DEL GRUPPO DI HEISENBERG

5 marzo 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. Presentiamo un teorema di esistenza di soluzioni positive per un problema al contorno relativo ad un'equazione semilineare con crescita critica su un aperto contraibile del gruppo di Heisenberg.

Abstract. We give an existence theorem for a boundary value problem related to a semilinear equation with critical exponent on contractible domains of the Heisenberg group.

NOTA: I risultati presentati in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il Prof. E. Lanconelli.

1 Introduzione

Sia $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ e sia $Q = 2n+2$ la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$. Consideriamo il problema di Dirichlet semilineare a crescita critica

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

In [LU]-[U] è stato dimostrato che (1.1) non ha soluzioni deboli se Ω è un semispazio. Questo risultato permette di dare una completa caratterizzazione dei livelli di compattezza delle successioni di Palais-Smale relative a (1.1). Come esempio di applicazione, in questo seminario mostriamo che esistono domini contraibili Ω di $\mathbb{H}^n$ per i quali il problema (1.1) ammette soluzioni. In questo modo estendiamo al contesto del gruppo di Heisenberg un risultato di Ding [D] relativo al Laplaciano classico.

Il problema al contorno a crescita critica

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

su domini limitati Ω di $\mathbb{R}^N$, è stato intensamente studiato. Nel 1965 Pohozaev [Po] ha dimostrato che (1.2) non ha soluzioni se Ω è stellato. D'altra parte, come osservato da Kazdan e Warner [KW], (1.2) ha soluzione (radiale) su una corona sferica. Inoltre, nel 1984, Coron [Co] ha mostrato che (1.2) è risolubile su domini con "buchi sufficientemente piccoli" congetturando che lo stesso risultato valga su qualsiasi dominio non contraibile. Tale congettura è stata verificata per $N = 3$ da Bahri e Coron [BC] nel 1988; in [BC] gli autori provano (per qualunque $N \geq 3$) che (1.2) ha soluzione se Ω ha almeno un gruppo di omologia non banale. Infine, nel 1989, Ding [D] (si veda anche Passaseo [P]) ha dimostrato che esistono domini contraibili sui quali (1.2) ha soluzione. In questo modo, Ding ha evidenziato che la solubilita' di (1.2) non dipende solo dalla topologia ma anche dalla geometria del dominio Ω.

Molti dei risultati sopracitati sono stati estesi al contesto subellittico del gruppo di Heisenberg. Infatti, nel 1992 Garofalo e Lanconelli [GL2] hanno dimostrato alcune notevoli identita' integrali di tipo Rellich-Pohozaev e con esse hanno provato la non esistenza di soluzioni di (1.1) su domini "$\mathbb{H}^n$-stellati"; inoltre hanno esteso il risultato di Kazdan-Warner. Nel 1995, Citti [C1] ha dimostrato una formula di rappresentazione per le successioni di Palais-Smale relative ad equazioni come quella in (1.1) e, grazie ad essa, ha esteso un risultato classico di Brezis e Nirenberg [BN] sull'equazione critica "perturbata". Il teorema di rappresentazione in [C1] mostrava la compattezza delle successioni di Palais-Smale ai livelli $\ell \in]0, \frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}[$ (essendo S la miglior costante per l'immersione di

Sobolev $S_0^1 \hookrightarrow L^{\frac{2Q}{Q-2}}$, cfr. (2.13)). I recenti risultati in [LU]-[U] consentono di migliorare questo teorema e ottenere compattezza a livelli più alti. In questo modo Citti in [C2] riesce ad estendere il risultato di Bahri-Coron al problema (1.1) e noi riusciamo ad estendere il risultato di Ding. Cercheremo soluzioni deboli di (1.1) come punti critici del funzionale

$$J : S_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 - \frac{Q-2}{2Q}\int_\Omega |u|^{\frac{2Q}{Q-2}}. \tag{1.3}$$

Rimandiamo al paragrafo 2 per le notazioni usate qui e nel seguito. Per i nostri scopi, il teorema di rappresentazione di Citti si può ora migliorare nel modo seguente.

Teorema 1.1 *Sia Ω un dominio connesso limitato e H-piatto di $\mathbb{H}^n$ e sia (u_k) una successione non negativa in $S_0^1(\Omega)$ tale che*

$$J(u_k) \to \ell > 0 \quad e \quad dJ(u_k) \to 0 \quad per\ k \to +\infty.$$

Allora esistono $u_0 \in S_0^1(\Omega)$, m successioni $(\xi_{1,k}), \dots, (\xi_{m,k})$ in Ω e m successioni $(\lambda_{1,k}), \dots, (\lambda_{m,k})$ in $\mathbb{R}^+$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) tali che (a meno di sottosuccessioni) si abbia

i) $u_k = u_0 + \sum_{i=1}^m U_{\lambda_{i,k},\xi_{i,k}} + o(1)$ *per $k \to +\infty$, in $S_0^1(\mathbb{H}^n)$,*

dove $U_{\lambda,\xi}$ sono le ben note soluzioni di (1.1) su tutto $\mathbb{H}^n$ definite in (2.10);

ii) $J(u_k) = J(u_0) + m\frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q} + o(1)$ *per $k \to +\infty$;*

iii) $dJ(u_0) = 0$;

iv) $\lambda_{i,k} \to +\infty$ *per $k \to +\infty$, per ogni $i = 1, \dots, m$.*

La definizione precisa di domini H-piatti è data nel paragrafo 2. In sostanza, si tratta di domini di classe C^2 abbastanza schiacciati nei punti caratteristici; questa sembra essere una naturale condizione di regolaritá nel senso della struttura intrinseca del gruppo di Heisenberg.

Corollario 1.2 *Nelle ipotesi del Teorema 1.1, se $\ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \{m\frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}\}_{m\in\mathbb{N}}$, allora esiste $u_0 \in S_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tale che $dJ(u_0) = 0$, cioè u_0 è soluzione debole di (1.1) in Ω. Inoltre, se $\ell \in]\frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}, 2\frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}[$, allora $u_k \to u_0$ fortemente in $S_0^1(\Omega)$.*

Osserviamo che, nel Teorema 1.1, ℓ non può stare in $]0, \frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}[$ poichè $dJ(u_0) = 0$ e $u_0 \neq 0$ implicano $J(u_0) > \frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}$. Pertanto, quando si cercano soluzioni dell'equazione critica "non perturbata", i risultati di non esistenza in [LU]-[U] diventano essenziali.

Grazie al Corollario 1.2, proveremo il seguente teorema.

Teorema 1.3 *Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Esistono un dominio limitato contraibile Ω di $\mathbb{H}^n$ e una soluzione debole u di (1.1) in Ω.*

Nota: i risultati esposti in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il Prof. E. Lanconelli.

2 Notazioni e richiami

Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, i cui punti saranno denotati con $\xi = (z,t) = (x,y,t)$, è il gruppo di Lie $(\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$ con legge di composizione definita da

$$\xi \circ \xi' = (z + z', t + t' + 2(\langle x', y\rangle - \langle x, y'\rangle))$$

dove $\langle\ ,\ \rangle$ denota il prodotto interno in $\mathbb{R}^n$. Il Laplaciano di Kohn su $\mathbb{H}^n$ è l'operatore

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^{n} ({X_j}^2 + {Y_j}^2)$$

dove

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t\ ,\quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t$$

per tutti i $j \in \{1, \dots, n\}$. Poniamo

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n).$$

Un naturale gruppo di dilatazioni su $\mathbb{H}^n$ è dato da

$$\delta_\lambda(\xi) = (\lambda z, \lambda^2 t)\ ,\quad \lambda > 0. \tag{2.1}$$

Il determinante Jacobiano di δ_λ è λ^Q dove

$$Q = 2n + 2$$

è la *dimensione omogenea* di $\mathbb{H}^n$. L'operatore $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ è invariante per le traslazioni a sinistra di $\mathbb{H}^n$ e omogeneo di grado 2 per le dilatazioni δ_λ. Più precisamente, se poniamo

$$\tau_\xi(\xi') = \xi \circ \xi' \tag{2.2}$$

si ha

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_\xi) = (\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_\xi\ ,\quad \Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^2(\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda.$$

Un importante analogia fra il Laplaciano di Kohn ed il classico operatore di Laplace consiste nel fatto che la soluzione fondamentale per $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ con il polo in zero è data da [F]

$$\Gamma(\xi) = \frac{c_Q}{d(\xi)^{Q-2}}\ ,$$

dove c_Q è un'opportuna costante positiva e

$$d(\xi) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}. \tag{2.3}$$

Inoltre, se definiamo $d(\xi, \xi') = d(\xi'^{-1} \circ \xi)$, allora d è una distanza su $\mathbb{H}^n$ (si veda [Cy] per una prova completa di questa affermazione). Indichiamo con $B_d(\xi, r)$ il d-disco di centro

ξ e raggio r. Grazie all'invarianza a sinistra della distanza d, si ha $\tau_\xi(B_d(0,r)) = B_d(\xi,r)$. Inoltre, poichè d è omogenea di grado 1 per le dilatazioni δ_λ, si ha anche $\delta_\lambda(B_d(0,r)) = B_d(0,\lambda r)$ e $|B_d(\xi,r)| = r^Q|B_d(0,1)|$. Qui $|\cdot|$ denota la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{2n+1}$. Ricordiamo anche che la misura di Lebesgue è una misura di Haar su $\mathbb{H}^n$.

Un ruolo cruciale nell'analisi funzionale sul gruppo di Heisenberg è giocato dalla seguente disuguaglianza di tipo Sobolev:

$$\|\varphi\|_{Q^*}^2 \leq c\|\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\|_2^2 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n) \tag{2.4}$$

dove

$$Q^* := \frac{2Q}{Q-2} \tag{2.5}$$

e c è una costante positiva. Se Ω è un aperto di $\mathbb{H}^n$, denotiamo con $S^1(\Omega)$ lo spazio di Sobolev delle funzioni $u \in L^{Q^*}(\Omega)$ tali che $\nabla_{\mathbb{H}^n}u \in L^2(\Omega)$. La norma in $S^1(\Omega)$ è data da

$$\|u\|_{S^1(\Omega)} = \|u\|_{Q^*} + \|\nabla_{\mathbb{H}^n}u\|_2. \tag{2.6}$$

Indichiamo con $S_0^1(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto a (2.6). Grazie a (2.4), questa norma è equivalente in $S_0^1(\Omega)$ a quella generata dal prodotto interno

$$\langle u,v\rangle_{S_0^1} = \int_\Omega \langle\nabla_{\mathbb{H}^n}u, \nabla_{\mathbb{H}^n}v\rangle.$$

L'esponente Q^* in (2.5) è l'esponente di Sobolev critico per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ poichè, anche quando Ω è limitato, l'immersione continua

$$S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{Q^*}(\Omega) \tag{2.7}$$

non è compatta.

Una soluzione debole del problema (1.1) è una funzione $u \in S_0^1(\Omega)$, $u > 0$, tale che

$$\int_\Omega \langle\nabla_{\mathbb{H}^n}u, \nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi\rangle = \int_\Omega u^{Q^*-1}\varphi \qquad \forall\varphi \in S_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Osserviamo esplicitamente che, per ogni $u,\varphi \in S_0^1(\Omega)$, $u \geq 0$, si ha $u^{\frac{Q+2}{Q-2}}\varphi \in L^1(\Omega)$. Infatti $\varphi \in L^{\frac{2Q}{Q-2}}(\Omega)$, $u^{\frac{Q+2}{Q-2}} \in L^{\frac{2Q}{Q+2}}(\Omega)$ e $\frac{Q-2}{2Q} + \frac{Q+2}{2Q} = 1$. Osserviamo anche che ogni soluzione classica di (1.1) soddisfa (2.8) poichè $X_j^* = -X_j$ e $Y_j^* = -Y_j$, per $j = 1,...,n$.

Se $\Omega = \mathbb{H}^n$, una soluzione di (1.1) è la seguente funzione di classe C^∞:

$$U(\xi) = U(z,t) = \frac{c_0}{((1+|z|^2)^2 + t^2)^{\frac{Q-2}{4}}} \tag{2.9}$$

dove c_0 è un'opportuna costante. Inoltre *ogni* soluzione debole di (1.1) con $\Omega = \mathbb{H}^n$ è del tipo

$$U_{\lambda,\xi} = \lambda^{\frac{Q-2}{2}} U \circ \delta_\lambda \circ \tau_{\xi^{-1}} \tag{2.10}$$

per opportuni $\lambda > 0$ e $\xi \in \mathbb{H}^n$. Questo profondo risultato di Jerison e Lee [JL] è l'analogo per il Laplaciano di Kohn di un famoso risultato di Talenti [T] relativo all'operatore di Laplace classico.

Oltre al funzionale J introdotto in (1.3) consideriamo il quoziente di Sobolev

$$K : S_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad K(u) = \frac{\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2}{\|u\|_{Q^*}^2}. \tag{2.11}$$

È facile verificare che K è di classe C^1 e per ogni $u, h \in S_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$,

$$dK(u)h = 2\|u\|_{Q^*}^{-2} \int_\Omega \langle \nabla_{\mathbb{H}^n} u, \nabla_{\mathbb{H}^n} h\rangle - 2\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2^2 \|u\|_{Q^*}^{-Q^*-2} \int_\Omega h|u|^{Q^*-1}\mathrm{sgn}(u). \tag{2.12}$$

La miglior costante nell'immersione di Sobolev (2.7) è data da

$$S = \inf_{S_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} K. \tag{2.13}$$

È standard riconoscere che S è una costante positiva che non dipende da Ω. Inoltre le uniche funzioni $u \in S_0^1$ tali che $K(u) = S$ sono quelle definite in (2.10) (cfr. [JL]). Si ha poi, essendo $dJ(U) = 0$,

$$\|\nabla_{\mathbb{H}^n} U\|_2 = S^{\frac{Q}{4}}, \quad \|U\|_{Q^*} = S^{\frac{Q-2}{4}}, \quad K(U) = S, \quad J(U) = \frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}. \tag{2.14}$$

Sia Ω un dominio regolare limitato di $\mathbb{H}^n$, sia $\xi_0 \in \partial\Omega$ e sia $\varphi = 0$ una equazione locale di $\partial\Omega$ in un intorno di ξ_0, cioè $\varphi : B_d(\xi_0, R) \to \mathbb{R}$, $\varphi(\xi) = 0$ per $\xi \in \partial\Omega \cap B_d(\xi_0, R)$, $\varphi(\xi) > 0$ per $\xi \in \Omega \cap B_d(\xi_0, R)$, con il gradiente Euclideo di φ sempre diverso da 0. Si dice che ξ_0 è un punto caratteristico se $\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi(\xi_0) = 0$. Si dice che Ω è H-piatto se ha bordo di classe C^2 e per ogni punto caratteristico ξ_0 si ha

$$q_H\varphi(\xi_0) = 0.$$

Qui $q_H\varphi(\xi_0)$ denota la forma quadratica associata alla matrice Hessiana di φ lungo i campi X_j e Y_j, cioè

$$(q_H\varphi(\xi_0))(z) = \sum_{i,j=1}^{2n} (Z_i Z_j \varphi(\xi_0)) z_i z_j$$

dove $(Z_1, \dots, Z_{2n}) = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = \nabla_{\mathbb{H}^n}$. La nozione di dominio H-piatto è stata introdotta da Citti in [C2] e sembra essere una naturale condizione di regolarità

per un dominio Ω di $\mathbb{H}^n$: citando [C2], Ω H-piatto significa che $\partial\Omega$ ha in ogni punto un piano tangente nel senso della distanza di Heisenberg. Chiaramente, ogni dominio C^2 senza punti caratteristici è H-piatto (per esempio il dominio $\widetilde{A}_s$ ottenuto dalla corona cilindrica $A_s = \{(z,t) \in \mathbb{H}^n \,|\, 0 < s < |z| < 1-s, |t| < 1\}$ smussando gli spigoli, non ha punti caratteristici). I dischi metrici $B_d(\xi, r)$ sono un notevole esempio di domini H-piatti che possiedono punti caratteristici. Nel cercare i punti caratteristici, è intuitivo utilizzare la seguente condizione necessaria: se ξ_0 è un punto caratteristico di $\partial\Omega$ allora la retta uscente da ξ_0 ortogonale e incidente all'asse t deve essere tangente a $\partial\Omega$ in ξ_0. Infatti se $\varphi = 0$ è un equazione locale di $\partial\Omega$ in ξ_0 allora $\nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi(\xi_0) = 0$ implica

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{\mathbb{H}^n}\varphi(\xi_0), z_0\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} (x_{0,j}(\partial_{x_j}\varphi(\xi_0) + 2y_{0,j}\partial_t\varphi(\xi_0)) + y_{0,j}(\partial_{y_j}\varphi(\xi_0) - 2x_{0,j}\partial_t\varphi(\xi_0))) \\ &= \langle \nabla_z\varphi(\xi_0), z_0\rangle, \end{aligned}$$

cioè $(z_0, 0) \perp \nabla\varphi(\xi_0)$ dove $\nabla\varphi(\xi_0)$ genera lo spazio ortogonale a $\partial\Omega$ in ξ_0. Utilizzando questa semplice condizione geometrica si verifica immediatamente, per esempio, che i domini $\widetilde{A}_s$ citati sopra non hanno punti caratteristici.

3 Prova del Teorema 1.3

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Oltre alla notazione $\xi = (z,t) = (x,y,t)$ per i punti $\xi \in \mathbb{H}^n$, denoteremo anche $\hat{z} = (x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ e $\xi = (z,t) = (x_1; \hat{z}, t)$. Poniamo

$$A = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, |z| < 1, |t| < 1\}, \quad A^* = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, |z| = 1, |t| \leq 1\},$$
$$B = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, |z| \leq \frac{1}{2}, |t| \leq \frac{1}{2}\}, \quad B^* = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, |z| = \frac{1}{2}, |t| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Per piccoli $\varepsilon, s > 0$ definiamo

$$A_s = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, s < |z| < 1-s, |t| < 1\}, \quad K_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, 0 \leq x_1 \leq 1, |\hat{z}| \leq \varepsilon\}$$

e

$$\Omega_{\varepsilon,s} = A_s \setminus K_\varepsilon. \tag{3.1}$$

Supporremo che sia possibile smussare $\Omega_{\varepsilon,s}$ per ottenere un dominio H-piatto $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,s}$ tale che

$$\Omega_{2\varepsilon,2s} \subset \widetilde{\Omega}_{\varepsilon,s} \subset \Omega_{\varepsilon,s}. \tag{3.2}$$

Questa operazione di smussamento non è, per il momento, ancora stata formalizzata. Sembra però abbastanza ragionevole: infatti un dominio ottenuto da $\Omega_{\varepsilon,s}$ smussando gli spigoli può avere punti caratteristici solo "vicino" a $(1;0,1)$ e $(1;0,-1)$; pertanto basterà "schiacciare" il dominio in prossimità di quei punti in modo da renderli H-piatti. Il seguente teorema è il risultato principale di questo seminario.

Teorema 3.1 *Esiste $s_0 > 0$ tale che per ogni $s \in]0, s_0[$ esiste $\varepsilon_s > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \in]0, \varepsilon_s[$ esiste una soluzione debole u_0 di (1.1) in $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,s}$.*

Osservazione 3.2 *In realtà la soluzione u_0 nel Teorema 3.1 è anche soluzione classica di $-\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}}$ (cfr. [LU]).*

Osservazione 3.3 *$\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,s}$ è un dominio contraibile. Pertanto, il Teorema 1.3 segue immediatamente dal Teorema 3.1.*

Seguiremo le linee della dimostrazione di Ding [D]. Cominciamo con alcune definizioni. Per piccoli $\varepsilon, s > 0$ poniamo $\overline{\eta}_\varepsilon, \overline{\sigma}_s, \overline{\sigma}_0 : [0, +\infty[\to [0, 1]$,

$$\overline{\eta}_\varepsilon(t) = \begin{cases} = 0 & \text{per } t \in [0, \varepsilon] \\ = \varepsilon^{-1} t - 1 & \text{per } t \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \\ = 1 & \text{per } t \in [2\varepsilon, +\infty[\end{cases}$$

$$\overline{\sigma}_s(t) = \begin{cases} = 0 & \text{per } t \in [0, s] \cup [1 - s, +\infty[\\ = s^{-1} t - 1 & \text{per } t \in [s, 2s] \\ = 1 & \text{per } t \in [2s, \frac{3}{4}] \\ = 4\frac{1-s-t}{1-4s} & \text{per } t \in [\frac{3}{4}, 1 - s] \end{cases}$$

$$\overline{\sigma}_0(t) = \begin{cases} = 1 & \text{per } t \in [0, \frac{3}{4}] \\ = 4(1 - t) & \text{per } t \in [\frac{3}{4}, 1] \\ = 0 & \text{per } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Definiamo quindi le seguenti funzioni "cut-off": $\eta_\varepsilon, \sigma_s, \sigma_0, \theta : \mathbb{H}^n \to [0, 1]$,

$$\eta_\varepsilon(\xi) = \overline{\eta}_\varepsilon(|\hat{z}|), \quad \sigma_s(\xi) = \overline{\sigma}_s(|z|), \quad \sigma_0(\xi) = \overline{\sigma}_0(|z|), \quad \theta(\xi) = \overline{\sigma}_0(|t|).$$

Poniamo anche $\eta'_\varepsilon(\xi) = \overline{\eta}'_\varepsilon(|\hat{z}|)$, $\sigma'_s(\xi) = \overline{\sigma}'_s(|z|)$, $\sigma'_0(\xi) = \overline{\sigma}'_0(|z|)$, $\theta'(\xi) = \overline{\sigma}'_0(|t|)$. Richiamiamo ora (2.10) e poniamo

$$U_{\varepsilon,s,\lambda,\xi'} = \eta_\varepsilon \sigma_s \theta U_{\lambda,\xi'}, \quad U_{s,\lambda,\xi'} = \sigma_s \theta U_{\lambda,\xi'}, \quad U_{0,\lambda,\xi'} = \sigma_0 \theta U_{\lambda,\xi'}.$$

Nel seguito lavoreremo sullo spazio di Sobolev S_0^1. Pertanto indichiamo semplicemente con $\|\cdot\|$ la norma in S_0^1: $\|u\| := \|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2$. Poniamo, per ogni dominio Ω,

$$X(\Omega) = \{u \in S_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \mid u \geq 0\}, \quad M(\Omega) = \{u \in S_0^1(\Omega) \mid \|u\| = 1\}$$

e

$$\Sigma(\Omega) = X(\Omega) \cap M(\Omega).$$

Poniamo anche

$$R : X(\Omega) \to \Sigma(\Omega), \quad R(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

Osserviamo che $U_{\varepsilon,s,\lambda,\xi'} \in X(\Omega_{\varepsilon,s})$, $U_{s,\lambda,\xi'} \in X(A_s)$, $U_{0,\lambda,\xi'} \in X(A)$.

Oltre ai funzionali J e K introdotti in (1.3) e (2.11) definiamo, per ogni dominio limitato Ω di $\mathbb{H}^n$,

$$F : S_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^n, \quad F(u) = \int_\Omega \xi |\nabla_{\mathbb{H}^n} u(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.3}$$

È facile verificare che F è di classe C^1 e

$$dF(u)h = 2\int_\Omega \xi \langle \nabla_{\mathbb{H}^n} u(\xi), \nabla_{\mathbb{H}^n} h(\xi)\rangle d\xi \quad \forall u, h \in S_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Inoltre, se $\Omega \subseteq B(0,r)$, allora

$$\|dF(u)\| \le 2r\|u\| \quad \forall u \in S_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Poniamo ora

$$\beta : [-1,1] \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad \beta(t) = \begin{cases} = -\frac{1}{2} & \text{per } t \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ = t & \text{per } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ = \frac{1}{2} & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$b : \overline{A} \to B, \quad b(\xi') = \begin{cases} = (z', \beta(t')) & \text{per } |z'| \le \frac{1}{2} \\ = (\frac{z'}{2|z'|}, \beta(t')) & \text{per } |z'| \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Per ogni $\lambda^* > \lambda > 0$ poniamo anche $a_{\lambda,\lambda^*} : \overline{A} \to [\lambda, \lambda^*]$,

$$a_{\lambda,\lambda^*}(\xi') = \begin{cases} = \lambda & \text{per } |z'| \le \frac{1}{2} \\ = \lambda^* + 2(\lambda^* - \lambda)(|z'| - 1) & \text{per } |z'| \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Definiamo ora

$$h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*} : \overline{A} \to X(\Omega_{\varepsilon,s}), \quad h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}(\xi') = U_{\varepsilon,s,a_{\lambda,\lambda^*}(\xi'),b(\xi')},$$

$$\Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*} = \{f \in C(\overline{A}, X(\widetilde{\Omega}_{\frac{\varepsilon}{2},\frac{s}{2}})) \mid f|_{A^*} = h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}|_{A^*}\},$$

$$\ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*} = \inf_{f \in \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}} \max_{\xi' \in \overline{A}} K(f(\xi')).$$

Osserviamo che $h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$ è continua e quindi, per (3.2), $h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*} \in \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$.

La seguente proposizione è un passo cruciale nella prova del Teorema 3.1. Estendiamo al contesto del gruppo di Heisenberg un risultato di Coron [Co, Lemme 1].

Proposizione 3.4 *Sia Ω un dominio regolare limitato e sia V un aperto di $\mathbb{H}^n$ tale che $\overline{\Omega} \subset V$. Allora esiste $\alpha > 0$ tale che*

$$F(\{u \in M(\Omega) \mid K(u) \le S + \alpha\}) \subseteq V.$$

Qui S è la costante di Sobolev definita in (2.13).

La nostra prova è basata sui seguenti risultati.

Teorema 3.5 *(Ekeland [E, Theorem 1.1]) Sia (M, ϱ) uno spazio metrico completo e sia $E : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ inferiormente semicontinua, $\not\equiv +\infty$, inferiormente limitata. Per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ e per ogni $v \in M$ tali che $E(v) \leq \varepsilon + \inf_M E$, esiste $u \in M$ tale che*

$$E(u) \leq E(v), \quad \varrho(u,v) \leq \delta, \quad E(u) < E(w) + \frac{\varepsilon}{\delta}\varrho(u,w) \ \forall w \in M \setminus \{u\}.$$

Lemma 3.6 *Sia Ω un dominio regolare limitato di $\mathbb{H}^n$ e sia (u_k) una successione in $S_0^1(\Omega)$ tale che*

$$J(u_k) \to \frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}, \quad dJ(u_k) \to 0.$$

Allora esistono $\lambda_k > 0$ e $\xi_k \in \Omega$ tali che (a meno di sottosuccessioni)

$$\lambda_k \to +\infty, \qquad \|u_k - U_{\lambda_k,\xi_k}\| \to 0.$$

Il Lemma 3.6 è una formula di rappresentazione per successioni di Palais-Smale che possono cambiare segno. Può essere dimostrata ragionando esattamente come in [C1].

Dimostrazione della Proposizione 3.4 Esistono $r > 0$ e $\sigma > 0$ tali che

$$\overline{\Omega} \subset B(0,r) =: B_0, \quad \Omega_{2\sigma} := \{\xi \in \mathbb{H}^n \mid d(\xi, \overline{\Omega}) \leq 2\sigma\} \subseteq V. \tag{3.6}$$

Ponendo

$$\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{4r}\} \tag{3.7}$$

si ha

$$(v \in M(\Omega), u \in S_0^1(\Omega), \|u - v\| \leq \delta, F(v) \in \mathbb{H}^n \setminus V) \Rightarrow (F(u) \in \mathbb{H}^n \setminus \Omega_\sigma). \tag{3.8}$$

Infatti, per il teorema del valor medio e per (3.5), esistono $w \in [u,v]$ tali che $|F(u) - F(v)| \leq \|dF(w)\|\|u - v\| \leq 2r\|w\|\|u - v\| \leq 2r\delta(\|w - v\| + \|v\|) \leq 2r\delta(\delta + 1) \leq \sigma$ e richiamando (3.6) otteniamo (3.8). Ragioniamo ora per assurdo, supponendo che esista una successione (v_k) in $M(\Omega)$ tale che

$$F(v_k) \in \mathbb{H}^n \setminus V, \quad K(v_k) \leq S + \frac{1}{k}. \tag{3.9}$$

Se prolunghiamo K in 0 ponendo $K(0) = S$ (cfr. (2.13)), K risulta inferiormente semicontinua in $S_0^1(\Omega)$. Pertanto, per il Teorema 3.5 esiste una successione (u_k) in $S_0^1(\Omega)$ tale che

$$K(u_k) \leq K(v_k), \tag{3.10}$$

$$\|u_k - v_k\| \leq \delta, \tag{3.11}$$

$$K(u_k) \leq K(w) + \frac{1}{k\delta}\|u_k - w\| \quad \forall w \in S_0^1(\Omega). \tag{3.12}$$

Poichè $v_k \in M(\Omega)$, da (3.8), (3.9) e (3.11) otteniamo immediatamente

$$F(u_k) \in \mathbb{H}^n \setminus \Omega_\sigma, \tag{3.13}$$

$$|\|u_k\| - 1| \leq \delta. \tag{3.14}$$

Inoltre (3.9) e (3.10) danno $S = \inf_{S_0^1(\Omega)} K \leq K(u_k) \leq K(v_k) \leq S + \frac{1}{k}$. Quindi

$$K(u_k) \to S. \tag{3.15}$$

Scegliendo $w = u_k + th$ in (3.12), per $t < 0$ e $h \in S_0^1(\Omega)$, otteniamo $dK(u_k)h = \lim_{t\to 0^-} \frac{K(u_k+th)-K(u_k)}{t} \leq \frac{\|h\|}{k\delta}$. Poichè $-dK(u_k)h = dK(u_k)(-h)$ si ha $|dK(u_k)h| \leq \frac{\|h\|}{k\delta}$ e ricaviamo infine

$$dK(u_k) \to 0. \tag{3.16}$$

Ora, ponendo $\varrho_k = \|u_k\|^{\frac{Q-2}{2}} \|u_k\|_{Q^*}^{-\frac{Q}{2}}$, $\overline{u}_k = \varrho_k u_k$, si verifica facilmente che $J(\overline{u}_k) = \frac{K(u_k)^{\frac{Q}{2}}}{Q}$ e $\|dJ(\overline{u}_k)\| = \frac{1}{2} K(u_k)^{\frac{Q-4}{4}} \|u_k\| \|dK(u_k)\|$ (cfr. (2.12)). Pertanto, da (3.14), (3.15) e (3.16), si ottiene

$$J(\overline{u}_k) \to \frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}, \quad dJ(\overline{u}_k) \to 0. \tag{3.17}$$

Dunque, per il Lemma 3.6, esistono $\lambda_k > 0$ e $\xi_k \in \Omega$ tali che

$$\overline{u}_k - U_{\lambda_k,\xi_k} \to 0, \tag{3.18}$$

$$\lambda_k \to +\infty, \quad \xi_k \to \xi_0 \in \overline{\Omega} \subseteq B_0 \tag{3.19}$$

(B_0 è stato definito in (3.6)). D'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_0} \xi |\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{\lambda_k,\xi_k}(\xi)|^2 d\xi &= \lambda_k^Q \int_{B_0} \xi (|\nabla_{\mathbb{H}^n} U|^2 \circ \delta_{\lambda_k} \circ \tau_{\xi_k^{-1}})(\xi) d\xi \\ &= \int_{\delta_{\lambda_k} \tau_{\xi_k^{-1}} B_0} (\tau_{\xi_k} \circ \delta_{\lambda_k^{-1}})(\xi) |\nabla_{\mathbb{H}^n} U(\xi)|^2 d\xi \\ &\to \int_{\mathbb{H}^n} \xi_0 |\nabla_{\mathbb{H}^n} U(\xi)|^2 d\xi \quad \text{(per (3.19))} \\ &= S^{\frac{Q}{2}} \xi_0 \quad \text{(cfr. (2.14))}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da (3.18) e (3.20) segue facilmente che $F(\overline{u}_k) \to S^{\frac{Q}{2}} \xi_0$. Richiamando (3.15) otteniamo $\frac{F(\overline{u}_k)}{K(u_k)^{\frac{Q}{2}}} \to \xi_0$. Dunque, per k grandi, si ha

$$|F(u_k) - \xi_0| = \left| \|u_k\|^2 \frac{F(\overline{u}_k)}{K(u_k)^{\frac{Q}{2}}} - \xi_0 \right| \leq \left| \|u_k\|^2 - 1 \right| |\xi_0| + \|u_k\|^2 \left| \frac{F(\overline{u}_k)}{K(u_k)^{\frac{Q}{2}}} - \xi_0 \right| < \sigma,$$

per (3.14) e (3.7). Poichè $\xi_0 \in \overline{\Omega}$, questo contraddice (3.13).
□

Grazie alla Proposizione 3.4 proveremo il seguente risultato.

Proposizione 3.7 *Per ogni $s > 0$ piccolo, esiste $\alpha_s > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo e per ogni $\lambda^* > \lambda > 0$ si ha*

$$\ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*} \geq S + \alpha_s.$$

Lemma 3.8 *Siano $\varepsilon, s > 0$ piccoli, $\lambda^* > \lambda > 0$. Per ogni $f \in \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$ esiste $\xi_0 \in \overline{A}$ tale che*

$$\int_{\mathbb{H}^n} z|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f(\xi_0))(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Dimostrazione Poniamo $A_0 = \{z \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, |z| < 1\}$ e, per brevità, $h = h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$ e $\Lambda = \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$. Richiamando (2.9) e la definizione di h, si verifica che

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}(h(\xi'))(\xi) = -\nabla_{\mathbb{H}^n}(h(-z',t'))(-z,t) \qquad \forall \xi' \in \overline{A}, \forall \xi \in \mathbb{H}^n \tag{3.21}$$

Per ogni $f \in \Lambda$ definiamo

$$\Phi_f : \overline{A}_0 \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \Phi_f(z') = \int_{\mathbb{H}^n} z|\nabla_{\mathbb{H}^n}(f(z',0))(\xi)|^2 d\xi.$$

Osserviamo che $\Phi_f \in C(\overline{A}_0, \mathbb{R}^{2n})$ per la continuità di f e F. Ragioniamo ora per assurdo e supponiamo che esista $f \in \Lambda$ tale che $\Phi_f(z') \neq 0$ per ogni $z' \in \overline{A}_0$. Allora $0 \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \Phi_f(\partial A_0)$ ed il grado di Brower $\deg(\Phi_f, A_0, 0) = 0$. Poichè $f|_{A^*} = h|_{A^*}$ abbiamo $\Phi_f|_{\partial A_0} = \Phi_h|_{\partial A_0}$. Pertanto, per il teorema di Rouché, (si veda, ad esempio, [Pi, pag.164]), si ha

$$\deg(\Phi_h, A_0, 0) = \deg(\Phi_f, A_0, 0) = 0. \tag{3.22}$$

D'altra parte, per (3.21), per ogni $z' \in \partial A_0$ si ha

$$\begin{aligned}\Phi_h(z') &= \int_{\mathbb{H}^n} z|\nabla_{\mathbb{H}^n}(h(z',0))(\xi)|^2 d\xi = -\int_{\mathbb{H}^n} z|\nabla_{\mathbb{H}^n}(h(z',0))(-z,t)|^2 d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{H}^n} z|\nabla_{\mathbb{H}^n}(h(-z',0))(\xi)|^2 d\xi = -\Phi_h(-z').\end{aligned}$$

Pertanto, per il teorema di Borsuk (cfr. [Pi, pag.170]), $\deg(\Phi_h, A_0, 0)$ è un intero dispari. Questo contraddice (3.22) e prova il lemma.
□

Dimostrazione della Proposizione 3.7 Sia $V = \{\xi \in \mathbb{H}^n \,|\, z \neq 0\}$. Fissiamo $s > 0$ e scegliamo un dominio regolare Ω tale che $A_{\frac{s}{2}} \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq V$. Grazie alla Proposizione 3.4

esiste $\alpha_s > 0$ tale che $F(\{u \in M(\Omega) \,|\, K(u) \leq S + \alpha_s\}) \subseteq V$. Fissiamo ora anche $\varepsilon, \lambda, \lambda^*$ e, per brevità, denotiamo $h = h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$, $\Lambda = \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$ e $\ell = \ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*}$. Pe il Lemma 3.8, per ogni $f \in \Lambda$ esiste $\xi_f \in \overline{A}$ tale che

$$F(R(f(\xi_f))) = \|f(\xi_f)\|^{-2} F(f(\xi_f)) \in \mathbb{H}^n \setminus V.$$

Poichè $R(f(\xi_f)) \in M(\widetilde{\Omega}_{\frac{\varepsilon}{2},\frac{s}{2}}) \subseteq M(\Omega_{\frac{\varepsilon}{2},\frac{s}{2}}) \subseteq M(A_{\frac{s}{2}}) \subseteq M(\Omega)$, ne viene che $K(R(f(\xi_f))) > S + \alpha_s$. Pertanto

$$\max_{\xi' \in \overline{A}} K(f(\xi')) \geq K(f(\xi_f)) = K(R(f(\xi_f))) > S + \alpha_s \qquad \forall f \in \Lambda$$

e infine otteniamo

$$\ell = \inf_{f \in \Lambda} \max_{\xi' \in \overline{A}} K(f(\xi')) \geq S + \alpha_s.$$

□

Lemma 3.9 *Per un piccolo $\delta_0 > 0$ risulta*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \Big(\lim_{s \to 0^+} \Big(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\sup_{\xi' \in B} |K(U_{\varepsilon,s,\lambda,\xi'}) - S| \Big)\Big)\Big) = 0, \tag{3.23}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \Big(\sup_{s \in]0,\delta_0[} \Big(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\sup_{\xi' \in B^*} |K(U_{\varepsilon,s,\lambda,\xi'}) - S| \Big)\Big)\Big) = 0. \tag{3.24}$$

Dimostrazione È conseguenza di $K(U_{\lambda,\xi'}) = S$ (cfr. (2.14)), essendo $U_{\varepsilon,s,\lambda,\xi'}$ approssimazioni di $U_{\lambda,\xi'}$. Diamo solo uno schema della prova. Per piccoli $s > 0$ e per ogni $\lambda^* > \lambda > 0$, si ha

$$\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda,\lambda^*]} \Big| \|\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{\varepsilon,s,r,\xi'}\|_2 - \|\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{s,r,\xi'}\|_2 \Big| \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+. \tag{3.25}$$

Infatti $\|\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{\varepsilon,s,r,\xi'} - \nabla_{\mathbb{H}^n} U_{s,r,\xi'}\|_2 \leq \|(\eta_\varepsilon - 1)\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{s,r,\xi'}\|_2 + \|U_{s,r,\xi'} \nabla_{\mathbb{H}^n}(\eta_\varepsilon - 1)\|_2$ e

$$\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda,\lambda^*]} \|(\eta_\varepsilon - 1)\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{s,r,\xi'}\|_2 \leq c\Big(\int_A |\eta_\varepsilon - 1|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+,$$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda,\lambda^*]} \|U_{s,r,\xi'} \nabla_{\mathbb{H}^n}(\eta_\varepsilon - 1)\|_2 &\leq c\Big(\int_A |\nabla_{\mathbb{H}^n}(\eta_\varepsilon - 1)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq c\Big(\int_A |\eta'_\varepsilon|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(\varepsilon^{-2} |\{\xi \in A \,|\, |\hat{z}| < 2\varepsilon\}|)^{\frac{1}{2}} = c\varepsilon^{\frac{2n-3}{2}} \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+, \end{aligned}$$

poichè $n \geq 2$. È facile vedere che

$$\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda,\lambda^*]} \Big| \|U_{\varepsilon,s,r,\xi'}\|_{Q^*} - \|U_{s,r,\xi'}\|_{Q^*} \Big| \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+. \tag{3.26}$$

Inoltre si ha $\inf_{\xi' \in B, r \in [\lambda, \lambda^*]} \|U_{s,r,\xi'}\|_{Q^*} > c > 0$, $\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda, \lambda^*]} \|U_{s,r,\xi'}\|_{Q^*} < +\infty$, $\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda, \lambda^*]} \|\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{s,r,\xi'}\|_2 < +\infty$. Pertanto, da (3.25) e (3.26) ricaviamo

$$\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda, \lambda^*]} |K(U_{\varepsilon,s,r,\xi'}) - K(U_{s,r,\xi'})| \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+. \tag{3.27}$$

Ragionando come sopra si vede che

$$\sup_{\xi' \in B} |K(U_{s,\lambda,\xi'}) - K(U_{0,\lambda,\xi'})| \to 0, \quad \text{per } s \to 0^+ \quad \forall \lambda > 0. \tag{3.28}$$

Usando (2.14) e richiamando (2.9) non è difficile ottenere che $\sup_{\xi' \in B^*, s \in]0,\delta_0[} \left| \|\nabla_{\mathbb{H}^n} U_{s,\lambda,\xi'}\|_2 - S^{\frac{Q}{4}} \right| \to 0$, $\sup_{\xi' \in B^*, s \in]0,\delta_0[} \left| \|U_{s,\lambda,\xi'}\|_{Q^*} - S^{\frac{Q-2}{4}} \right| \to 0$, per $\lambda \to +\infty$, e quindi ricavare

$$\sup_{\xi' \in B^*, s \in]0,\delta_0[} |K(U_{s,\lambda,\xi'}) - S| \to 0, \quad \text{per } \lambda \to +\infty. \tag{3.29}$$

Allo stesso modo si vede che

$$\sup_{\xi' \in B} |K(U_{0,\lambda,\xi'}) - S| \to 0, \quad \text{per } \lambda \to +\infty. \tag{3.30}$$

Unendo (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30) si ottengono (3.23) e (3.24).
□

Lemma 3.10 *Esistono $\lambda > 0$ e $s_0 > 0$ tali che per ogni $s \in]0, s_0[$ esistono $\varepsilon_s > 0$ e $\lambda_s > \lambda$ tali che per ogni $\varepsilon \in]0, \varepsilon_s[$ si ha*

$$S \leq \max_{\xi' \in A^*} K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < \ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s} < 2^{\frac{2}{Q}} S.$$

Dimostrazione Per (3.29) e (3.23), esiste $\lambda > 0$ tale che

$$\sup_{\xi' \in B^*, \tau \in]0,\delta_0[} |K(U_{\tau,r,\xi'}) - S| < \frac{2^{\frac{2}{Q}} - 1}{2} S \qquad \forall r \geq \lambda \tag{3.31}$$

ed esiste $s_0 > 0$ tale che per ogni $s \in]0, s_0[$ esiste $\varepsilon_{s,1} > 0$ tale che

$$\sup_{\xi' \in B} K(U_{\varepsilon,s,\lambda,\xi'}) < 2^{\frac{2}{Q}} S \qquad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_{s,1}[. \tag{3.32}$$

Fissiamo ora $s \in]0, s_0[$. Grazie alla Proposizione 3.7 esiste $\alpha_s > 0$ tale che

$$\ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda^*} \geq S + \alpha_s \qquad \forall \varepsilon > 0, \forall \lambda^* > \lambda. \tag{3.33}$$

Inoltre, per (3.24) esistono $\lambda_s > \lambda$ e $\varepsilon_{s,2} > 0$ tali che

$$\sup_{\xi' \in B^*} |K(U_{\varepsilon,s,\lambda_s,\xi'}) - S| < \alpha_s \qquad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_{s,2}[. \tag{3.34}$$

Per (3.27) esiste poi $\varepsilon_{s,3} > 0$ tale che

$$\sup_{\xi' \in B, r \in [\lambda,\lambda_s]} |K(U_{\varepsilon,s,r,\xi'}) - K(U_{s,r,\xi'})| < \frac{2^{\frac{2}{Q}} - 1}{2} S \qquad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_{s,3}[. \tag{3.35}$$

Poniamo ora $\varepsilon_s = \min\{\varepsilon_{s,1}, \varepsilon_{s,2}, \varepsilon_{s,3}\}$ e fissiamo $\varepsilon \in]0, \varepsilon_s[$. Da (3.31) e (3.35) otteniamo $\sup_{\xi' \in B^*, r \in [\lambda,\lambda_s]} K(U_{\varepsilon,s,r,\xi'}) < 2^{\frac{2}{Q}} S$. Dunque, per ogni $\xi' \in \overline{A}$ tale che $\frac{1}{2} \leq |z'| \leq 1$ si ha $K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < 2^{\frac{2}{Q}} S$. D'altra parte, se $|z'| \leq \frac{1}{2}$, allora $a_{\lambda,\lambda_s}(\xi') = \lambda$ e (3.32) implica $K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < 2^{\frac{2}{Q}} S$. Pertanto

$$\max_{\xi' \in \overline{A}} K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < 2^{\frac{2}{Q}} S. \tag{3.36}$$

Inoltre, poichè per ogni $\xi' \in A^*$ si ha $a_{\lambda,\lambda_s}(\xi') = \lambda_s$ e $b(\xi') \in B^*$, (3.34) implica

$$\max_{\xi' \in A^*} K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < S + \alpha_s. \tag{3.37}$$

Unendo (2.13), (3.37), (3.33) e (3.36) possiamo concludere

$$\begin{aligned} S &= \inf_{S_0^1(\overline{\Omega}_{\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}}) \setminus \{0\}} K \leq \max_{\xi' \in A^*} K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < S + \alpha_s \leq \ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s} \\ &= \inf_{f \in \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}} \max_{\xi' \in \overline{A}} K(f(\xi')) \leq \max_{\xi' \in \overline{A}} K(h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}(\xi')) < 2^{\frac{2}{Q}} S. \end{aligned}$$

□

Siamo ora in grado di provare il Teorema 3.1, mostrando che $\ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}$ è un livello critico asintotico di K ed applicando il Corollario 1.2. Useremo il seguente lemma di deformazione.

Lemma 3.11 *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{H}^n$. Se $\ell \in \mathbb{R}$ non è un livello critico asintotico di $K|_{\Sigma(\Omega)}$ allora esiste $\overline{\varrho} > 0$ tale che per ogni $\varrho \in]0, \overline{\varrho}[$ esiste un omeomorfismo η di $\Sigma(\Omega)$ in $\Sigma(\Omega)$ tale che*

$$\eta(\{u \in \Sigma(\Omega) \,|\, K(u) \leq \ell + \varrho\}) \subseteq \{u \in \Sigma(\Omega) \,|\, K(u) \leq \ell - \varrho\}, \tag{3.38}$$

$$\eta(u) = u \quad \forall u \in \Sigma(\Omega) \text{ tale che } |K(u) - \ell| \geq 2\varrho. \tag{3.39}$$

Ricordiamo che ℓ si dice un livello critico asintotico di $K|_{\Sigma(\Omega)}$ se esiste una succesione (u_k) in $\Sigma(\Omega)$ tale che $K(u_k) \to \ell$, $d(K|_{M(\Omega)})(u_k) \to 0$. Osserviamo esplicitamente che $(d(K|_{M(\Omega)})(u_k) \to 0) \Leftrightarrow (dK(u_k) \to 0)$ poichè per ogni $u \in M(\Omega)$ il gradiente $K'(u)$

è tangente a $M(\Omega)$ in u, essendo $dK(u)u = 0$ (cfr. (2.12)). La prova del Lemma 3.11 è standard, si vedano ad esempio Rabinowitz [R] e Hofer [H, Lemma 1]. A questo proposito, facciamo notare che $M(\Omega)$ è invariante per il flusso di gradiente di K. Inoltre $\Sigma(\Omega) = M(\Omega) \cap X(\Omega)$ con $X(\Omega)$ convesso e chiuso in $S_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, e K' ammette la decomposizione (cfr. (2.12))

$$K'(u) = \tau(u)(u - T(u))$$

dove $\tau : S_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\tau(u) = 2\|u\|_{Q^*}^{-2}$ ($\tau > 0$ e localmente lipschitziana) e $T : S_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to S_0^1(\Omega)$, $T(u) = \|u\|^2\|u\|_{Q^*}^{-Q^*} w_u$, essendo w_u la (unica) soluzione debole di

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{H}^n} w_u = |u|^{\frac{Q+2}{Q-2}} \operatorname{sgn}(u) & \text{in } \Omega \\ w_u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

e quindi T tale che $T(X(\Omega)) \subseteq X(\Omega)$, per il principio di massimo debole per $\Delta_{\mathbf{H}^n}$.

Dimostrazione del Teorema 3.1 Manteniamo la notazione del Lemma 3.10 e, per brevità, poniamo $\ell = \ell_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}$, $h = h_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}$, $\Lambda = \Lambda_{\varepsilon,s,\lambda,\lambda_s}$ e $\Omega = \widetilde{\Omega}_{\frac{\varepsilon}{2},\frac{s}{2}}$. Il Lemma 3.10 afferma che

$$S \leq \max_{\xi' \in A^*} K(h(\xi')) < \ell < 2^{\frac{2}{Q}} S. \tag{3.40}$$

In particolare esiste $\varrho_0 > 0$ tale che

$$|K(h(\xi')) - \ell| \geq 2\varrho_0 \qquad \forall \xi' \in A^*. \tag{3.41}$$

Ragioniamo ora per assurdo supponendo che ℓ non sia un livello critico asintotico di $K|_{\Sigma(\Omega)}$. Allora, per il Lemma 3.11, esistono $\varrho \in]0, \varrho_0[$ ed un omeomorfismo η di $\Sigma(\Omega)$ in $\Sigma(\Omega)$ per i quali valgano (3.38) e (3.39). Poniamo $\widetilde{h} = R \circ h$, $\widetilde{\Lambda} = \{R \circ f \mid f \in \Lambda\} = \{\widetilde{f} \in C(\overline{A}, \Sigma(\Omega)) \mid \widetilde{f}|_{A^*} = \widetilde{h}|_{A^*}\}$ e $\Gamma = \{\gamma_{\widetilde{f}} \mid \widetilde{f} \in \widetilde{\Lambda}\}$ dove $\gamma_{\widetilde{f}} = \{\widetilde{f}(\xi') \mid \xi' \in \overline{A}\}$. Poichè $K(R(u)) = K(u)$ si ha $\ell = \inf_{\widetilde{f} \in \widetilde{\Lambda}} \max_{\xi' \in \overline{A}} K(\widetilde{f}(\xi')) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} K(u)$. Grazie a (3.38) e al "principio di minimax" abbiamo $\eta(\Gamma) \not\subseteq \Gamma$. D'altra parte, per ogni $\widetilde{f} \in \widetilde{\Lambda}$ e $\xi' \in A^*$, (3.41) e (3.39) danno $\eta(\widetilde{f}(\xi')) = \eta(\widetilde{h}(\xi')) = \widetilde{h}(\xi')$. Dunque, per ogni $\widetilde{f} \in \widetilde{\Lambda}$, $\eta \circ \widetilde{f} \in \widetilde{\Lambda}$, cioè $\eta(\gamma_{\widetilde{f}}) = \gamma_{\eta \circ \widetilde{f}} \in \Gamma$. Questo prova che $\eta(\Gamma) \subseteq \Gamma$ e porta ad un assurdo.

Pertanto ℓ è un livello critico asintotico di $K|_{\Sigma(\Omega)}$. Ragionando come nella prova della Proposizione 3.4 (cfr. (3.15), (3.16) e (3.17)) possiamo allora trovare una successione di Palais-Smale non negativa $(\overline{u}_k)$ di J al livello $\overline{\ell} = \frac{\ell^{\frac{Q}{2}}}{Q}$. Inoltre, per (3.40) $\overline{\ell} \in]\frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}, 2\frac{S^{\frac{Q}{2}}}{Q}[$. Poichè Ω è H-piatto, possiamo ora applicare il Corollario 1.2 e ottenere una soluzione debole non negativa u_0 di (1.1) in Ω.

□

Bibliografia

[BC] A. BAHRI, J.M. CORON, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 253-294.

[BN] H. BREZIS, L. NIRENBERG, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[C1] G. CITTI, *Semilinear Dirichlet problem involving critical exponent for the Kohn Laplacian*, Ann. Mat. Pura Appl. **169** (1995), 375-392.

[C2] G. CITTI, *Semilinear Dirichlet problems involving critical exponent for the Kohn Laplacian on open sets with nontrivial topology*, preprint.

[Co] J.-M. CORON, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **299** (1984), 209-212.

[Cy] J. CYGAN, *Wiener's test for the Brownian motion on the Heisenberg group*, Colloquium Math. **39** (1978), 367-373.

[D] W.-Y. DING, *Positive solutions of* $\Delta u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ *on contractible domains*, J. Partial Differential Equations **2** (1989), 83-88.

[E] I. EKELAND, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324-353.

[F] G.B. FOLLAND, *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 373-376.

[GL1] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, *Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **40** (1990), 313-356.

[GL2] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, *Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), 71-98.

[H] H. HOFER, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. **261** (1982), 493-514.

[JL] D. JERISON, J.M. LEE, *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 1-13.

[KW] J. KAZDAN, F. WARNER, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 567-597.

[LU] E. LANCONELLI, F. UGUZZONI, *Asymptotic behavior and non-existence theorems for semilinear Dirichlet problems involving critical exponent on unbounded domains of the Heisenberg group*, Boll. Un. Mat. Ital., to appear.

[P] D. PASSASEO, *Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contractible domains*, Manuscripta Math. **65** (1989), 147-165.

[Pi] B. PINI, *Lezioni di analisi matematica di secondo livello - Parte I*, CLUEB, Bologna, 1983.

[Po] S.I. POHOZAEV, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady **6** (1965), tom 165, 1408-1411.

[R] P.H. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Math. **65** (1986).

[T] G. TALENTI, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. Serie IV **110** (1976), 353-372.

[U] F. UGUZZONI, *A non-existence theorem for a semilinear Dirichlet problem involving critical exponent on halfspaces of the Heisenberg group*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., to appear.